Vol. 30 (2010)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

有界解析函数的 n 阶导数估计

戴绍虞 [1,2] , 潘一飞 [3,4]

(1. 南京师范大学数学与计算机科学学院，江苏 南京 210097)

(2. 金陵科技学院基础部，江苏 南京 210001)

(3. 江西师范大学数学与信息科学学院，江西 南昌 330027)

(*4.Dept. of Math. Sciences, Indiana University-Purdue University Fort Wayne, Fort Wayne 46805-1499,USA*)

摘 要: 本文研究了有界解析函数的 n 阶导数估计. 利用有界解析函数泰勒展开式的系数估计，得到了 n 阶导数估计的一般式, 改进了已有的相关结果.

关 键 词: 有界解析函数; 导数估计

MR(2000) **主题分类号**: 30C10 **中 图 分 类 号**: O174.5

文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2010)02-0296-07

1 引言

设 $\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|\varphi(z)|<1$，则由 Schwarz 引理可知如下不等式

$$|\varphi'(z)| \leq (1-|\varphi(z)|^2)/(1-|z|^2).$$

1984 年，文献 [1] 得到了二阶与三阶导数的估计式. 当 $\varphi(z)$ 满足上述条件时，则

$$|\varphi''(z)| \leq \frac{2!(1+|z|)}{(1-|z|^2)^2}(1-|\varphi(z)|^2).$$

随后，文献 [2] 将结果推广至 n 阶导数的一般估计式 $|\varphi^{(n)}(z)| \leq \frac{n!(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}\sum\limits_{m=0}^{n-1} I(n,m)|z|^m$，其中 $I(n,0)=1, I(n,1)=n-1, I(n,m)=\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{n-1}{n-k-1}I(n-k,m-k); m\leq n-1, m=1,2,\cdots,n-1.$

本文目的在于讨论有界解析函数 n 阶导数的估计式，主要结果如下.

定理 1.1 设 $\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|\varphi(z)|<1$，则

$$|\varphi^{(n)}(z)| \leq \sum_{v=1}^{n} A_v \frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!},$$

*收稿日期: 2006-10-17 接收日期: 2008-9-13

基金项目: 国家自然科学基金资助 (10671093).

作者简介: 戴绍虞 (1981–)，女，浙江绍兴，博士生，从事多复变函数的研究.

其中 $A_{2m+1}=1-|c_0|^2-\cdots-|c_m|^2$，$A_{2m+2}=1-|c_0|^2-\cdots-|c_m|^2$，$m=0,1,2,\cdots$，
$c_m=\frac{1}{m!}[\varphi^{(m)}(z)(1-|z|^2)^m+\sum\limits_{j=1}^{m-1}(-1)^j\frac{m!(m-1)!}{j!(m-j)!(m-j-1)!}\bar{z}^j(1-|z|^2)^{m-j}\varphi^{(m-j)}(z)]$.

推论 1.1 设 $\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|\varphi(z)|<1$，则

$$|\varphi^{(n)}(z)|\le\frac{n!(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}(1+|z|)^{n-1}.$$

推论 1.2 设 $\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|\varphi(z)|<1$，则当 $n\ge 3$ 时有

$$|\varphi^{(n)}(z)|\le\frac{n!(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}(1+|z|)^{n-1}-\frac{n!|\varphi'(z)|^2}{(1-|z|^2)^{n-2}}[(1+|z|)^{n-1}-|z|^{n-1}-(n-1)|z|^{n-2}].$$

此外，我们应用定理证明中所用到的引理，得到了比 Bohr 定理更精确的估计.

2 定理及推论的证明

为便于叙述，以下记 $\mathcal{B}=\{\varphi(z):\varphi(z)$ 在 D 上解析，且 $|\varphi(z)|<1\}$，其中 D 为单位圆. 定理 1.1 的证明需要下面两个引理.

引理 2.1 (见文献 [3]) 设 $f(z)\in\mathcal{B}$，$H(D)=\{D$ 上全体解析函数$\}$，记 $H'(D)$ 为 $H(D)$ 上的线性泛函空间. 则对 $H'(D)$ 上的任何线性泛函 L 有下面的不等式成立

$$|L^2(\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta})|\le|L|^2(\frac{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}}),\tag{2.1}$$

其中 L^2 表示 $L^2(\varphi)=L(L(\varphi))$，$\varphi=\varphi(z,\zeta)$ 关于 z 解析，且关于 ζ 解析；$|L|^2$ 表示 $|L|^2(\psi)=L(\overline{L(\psi)})$，$\psi=\psi(z,\bar{\zeta})$ 关于 z 解析，且关于 $\bar{\zeta}$ 解析.

引理 2.2 (见文献 [3]) 设 $f(z)\in\mathcal{B}$，若 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，则当 $n\ge 0$ 时有

$$|a_{2n+1}|\le 1-|a_0|^2-\cdots-|a_n|^2,$$

$$|a_{2n+2}|\le 1-|a_0|^2-\cdots-|a_n|^2.$$

此引理在文献 [3] 中没有给证明，为方便读者，我们给出证明.

证 由引理 2.1 知对 $H'(D)$ 上的任何线性泛函 L 有 (2.1) 式成立. 因为 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，所以

$$\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{z^n-\zeta^n}{z-\zeta}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\sum_{m=0}^{n-1}z^{n-1-m}\zeta^m);$$

$$\begin{aligned}\frac{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}}&=(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\bar{\zeta}^n)[1-(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n)(\sum_{m=0}^{\infty}\bar{a}_m\bar{\zeta}^m)]\\&=(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\bar{\zeta}^n)-(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\bar{\zeta}^n)(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n)(\sum_{m=0}^{\infty}\bar{a}_m\bar{\zeta}^m).\end{aligned}$$

设线性泛函 $L(F)=F(0)$，即取 F 在 0 点的 Taylor 展开式的常数项，则

$$L^2(\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta})=L_\zeta(L_z(\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}))=L_\zeta(\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\sum_{m=0}^{n-1}z^{n-1-m}\zeta^m))=L_\zeta(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\zeta^{n-1})=a_1;$$

$$|L|^2(\frac{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}}) = L_\zeta(\overline{L_z(\frac{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}})})$$
$$= L_\zeta(\overline{L_z((\sum_{n=0}^{\infty} z^n\bar{\zeta}^n) - (\sum_{n=0}^{\infty} z^n\bar{\zeta}^n)(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)(\sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m\bar{\zeta}^m))})$$
$$= L_\zeta(\overline{1 - a_0\sum_{m=0}^{\infty}\bar{a}_m\bar{\zeta}^m}) = L_\zeta(1-\bar{a}_0\sum_{m=0}^{\infty} a_m\zeta^m) = 1-|a_0|^2.$$

则由 (2.1) 式得 $|a_1| \le 1-|a_0|^2$.

更一般地，若设 $L(F) = \frac{F^{(p)}(0)}{p!}$，即取 F 在 0 点的 Taylor 展开式的 p 次项系数，则

$$L^2(\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}) = L_\zeta(L_z(\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta})) = L_\zeta(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\sum_{m=0}^{n-1} z^{n-1-m}\zeta^m))$$
$$= L_\zeta(\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n\zeta^{n-1-p}) = a_{2p+1};$$
$$|L|^2(\frac{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}}) = L_\zeta(\overline{L_z(\frac{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}})})$$
$$=L_\zeta(\overline{L_z((\sum_{n=0}^{\infty} z^n\bar{\zeta}^n) - (\sum_{n=0}^{\infty} z^n\bar{\zeta}^n)(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)(\sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m\bar{\zeta}^m))})$$
$$= L_\zeta(\overline{\bar{\zeta}^p - (\sum_{n=0}^{p}\bar{\zeta}^n a_{p-n})(\sum_{m=0}^{\infty}\bar{a}_m\bar{\zeta}^m)}) = L_\zeta(\zeta^p - (\sum_{n=0}^{p}\zeta^n\bar{a}_{p-n})(\sum_{m=0}^{\infty} a_m\zeta^m))$$
$$= 1-\sum_{n=0}^{p}|a_{p-n}|^2 = 1-|a_0|^2-\cdots-|a_p|^2.$$

则由 (2.1) 式得 $|a_{2p+1}| \le 1-|a_0|^2-\cdots-|a_p|^2$. 综上可知，当 $n \ge 0$ 时, $|a_{2n+1}| \le 1-|a_0|^2-\cdots-|a_n|^2$.

下证当 $n \ge 0$ 时, $|a_{2n+2}| \le 1-|a_0|^2-\cdots-|a_n|^2$. 令 $g(z) = zf(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$，则由上可知 $|b_{2n+1}| \le 1-|b_0|^2-\cdots-|b_n|^2$, $(n=0,1,2,\ldots)$. 注意到 $b_0=0$，当 $n \ge 0$ 时 $b_{n+1}=a_n$，则 $|a_{2n}| \le 1-|a_0|^2-\cdots-|a_{n-1}|^2$, $(n=1,2,3,\cdots)$, 即

$$|a_{2n+2}| \le 1-|a_0|^2-\cdots-|a_n|^2 \ \ (n=0,1,2,\cdots).$$

至此引理得证.

下面给出定理 1.1 的证明.

证 $\varphi(z) \in \mathcal{B}$，考虑 $F(z) = \varphi(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}) = \sum\limits_{v=0}^{\infty} c_v z^v \in \mathcal{B}$, 其中 c_v 与 ζ 有关.

$$\varphi(z) = F(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z})^v \in \mathcal{B},\ \varphi^{(n)}(\zeta) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v\frac{d^n}{dz^n}(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z})^v|_{z=\zeta}.$$

又当 $v \geq 1$ 时，令 $f(z) = (z-\zeta)^v$，$g(z) = (1-\bar{\zeta}z)^{-v}$，则

$$\frac{d^n}{dz^n}(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z})^v = \frac{d^n}{dz^n}[(z-\zeta)^v(1-\bar{\zeta}z)^{-v}] = \frac{d^n}{dz^n}(f(z)g(z)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(z)g^{(n-k)}(z),$$

$$f^{(k)}(z) = \begin{cases} \frac{v!}{(v-k)!}(z-\zeta)^{v-k}, & k \leq v, \\ 0, & k > v, \end{cases} \quad g^{(n-k)}(z) = \frac{(v+k-1)!}{(v-1)!}\bar{\zeta}^k(1-\bar{\zeta}z)^{-v-k},$$

所以 $\frac{d^n}{dz^n}(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z})^v|_{z=\zeta} = \begin{cases} 0, & n < v; \\ \frac{(\bar{\zeta})^{n-v}}{(1-|\zeta|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}, & n \geq v. \end{cases}$ 那么

$$\varphi^{(n)}(\zeta) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v \frac{d^n}{dz^n}(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z})^v|_{z=\zeta} = \sum_{v=1}^{n} c_v \frac{d^n}{dz^n}(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z})^v|_{z=\zeta} = \sum_{v=1}^{n} c_v \frac{(\bar{\zeta})^{n-v}}{(1-|\zeta|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}.$$

所以 $|\varphi^{(n)}(\zeta)| \leq \sum\limits_{v=1}^{n}|c_v|\frac{|\zeta|^{n-v}}{(1-|\zeta|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}$. 若令

$$A_{2m+1} = 1-|c_0|^2-\cdots-|c_m|^2, \ A_{2m+2} = 1-|c_0|^2-\cdots-|c_m|^2,$$

其中 $m = 0, 1, 2, \cdots$. 则利用引理 2.2 的结果对 $|c_v|$ 进行放大，可得

$$|\varphi^{(n)}(\zeta)| \leq \sum_{v=1}^{n} A_v \frac{|\zeta|^{n-v}}{(1-|\zeta|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}.$$

注意到 c_m 是由式子 $F(z) = \varphi(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}) = \sum\limits_{v=0}^{\infty} c_v z^v$ 决定的，则 $c_m = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial z^m}\varphi(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z})|_{z=0}$. 由文献 [4] 知

$$\begin{aligned}\frac{\partial^m}{\partial z^m}\varphi(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}) =& \varphi^{(m)}(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z})(\frac{1-|\zeta|^2}{(1+\bar{\zeta}z)^2})^m \\ &+ \sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j\frac{m!(m-1)!}{j!(m-j)!(m-j-1)!}\frac{\bar{\zeta}^j(1-|\zeta|^2)^{m-j}}{(1+\bar{\zeta}z)^{2m-j}}\varphi^{(m-j)}(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}),\end{aligned}$$

则 $c_m = \frac{1}{m!}[\varphi^{(m)}(\zeta)(1-|\zeta|^2)^m + \sum\limits_{j=1}^{m-1}(-1)^j\frac{m!(m-1)!}{j!(m-j)!(m-j-1)!}\bar{\zeta}^j(1-|\zeta|^2)^{m-j}\varphi^{(m-j)}(\zeta)]$. 将 ζ 换成 z 即得定理结果.

在定理 1.1 中显然 $A_v \leq 1-|c_0|^2, v = 0, 1, 2, \ldots$，我们利用 $1-|c_0|^2$ 对 A_v 进行放大，得到了推论 1.1.

下面给出推论 1.1 的证明.

证 由定理 1.1 的结果可知 $|\varphi^{(n)}(z)| \leq \sum\limits_{v=1}^{n}(1-|c_0|^2)\frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}$. 又 $c_0 = \varphi(z)$，则

$$\begin{aligned}|\varphi^{(n)}(z)| \leq& \sum_{v=1}^{n}(1-|\varphi(z)|^2)\frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!} = \frac{n!(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!}|z|^m \\ =& \frac{n!(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}|z|^m = \frac{n!(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}(1+|z|)^{n-1}.\end{aligned}$$

至此，推论得证.

此外，在作者最近发表的文献 [5] 中也得到了和推论 1.1 相同的结果. 考虑定理 1.1 结果中的 A_v，若当 $v\geq 3$ 时统一放大 A_v 至 $A_v\leq 1-|c_0|^2-|c_1|^2$，那么可得推论 1.2.

下面给出推论 1.2 的证明.

证 由定理 1.1 的结果知 $|\varphi^{(n)}(z)|\leq\sum\limits_{v=1}^{n}A_v\frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}$, 其中 $A_1=A_2=1-|c_0|^2$，当 $v\geq 3$ 时 $A_v\leq 1-|c_0|^2-|c_1|^2$，$c_0=\varphi(z)$，$c_1=\varphi'(z)(1-|z|^2)$. 那么

$$
\begin{aligned}
&|\varphi^{(n)}(z)|\leq\sum_{v=1}^{2}A_v\frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}+\sum_{v=3}^{n}A_v\frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}\\
\leq&(1-|c_0|^2)\sum_{v=1}^{2}\frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}+(1-|c_0|^2-|c_1|^2)\sum_{v=3}^{n}\frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}\\
=&(1-|c_0|^2)\sum_{v=1}^{n}\frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}+(-|c_1|^2)\sum_{v=3}^{n}\frac{|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}\\
=&\frac{n!(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}(1+|z|)^{n-1}-\sum_{v=3}^{n}\frac{|\varphi'(z)|^2|z|^{n-v}}{(1-|z|^2)^{n-2}}\frac{n!(n-1)!}{(n-v)!(v-1)!}\\
=&\frac{n!(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}(1+|z|)^{n-1}-\frac{n!|\varphi'(z)|^2}{(1-|z|^2)^{n-2}}[(1+|z|)^{n-1}-|z|^{n-1}-(n-1)|z|^{n-2}].
\end{aligned}
$$

3 精确性的说明

由定理 1.1 与推论 1.1 的证明可知前者的结果比后者精确，但后者的结果更为简洁. 下面我们利用 Mobius 变换 $f(z)=\frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ 来考察定理 1.1 的精确程度.

考察 Mobius 变换 $f(z)=\frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ 在 $z=0$ 处的导数，当求导次数是奇数次时，由定理 1.1 的估计式可知

$$|f^{(2n+1)}(0)|\leq A_{2n+1}(2n+1)!=(2n+1)!(1-|c_0|^2-\cdots-|c_n|^2).$$

经计算 $|c_0|=|a|^2$，当 $n\geq 1$ 时 $|c_n|=\frac{1}{n!}|f^{(n)}(0)|=|a|^{n-1}(1-|a|^2)$，则

$$
\begin{aligned}
|f^{(2n+1)}(0)|&\leq(2n+1)![1-|a|^2-(1-|a|^2)^2-|a|^2(1-|a|^2)^2\cdots-|a|^{2n-2}(1-|a|^2)^2]\\
&=(2n+1)!(1-|a|^2)[1-(1-|a|^2)(1+|a|^2+\cdots+|a|^{2n-2})]\\
&=(2n+1)!|a|^{2n}(1-|a|^2).
\end{aligned}
$$

另一方面，对 $f(z)=\frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ 计算得 $|f^{(2n+1)}(0)|=(2n+1)!|a|^{2n}(1-|a|^2)$. 所以 $f(z)$ 在 $z=0$ 处的奇数阶导数的估计值与真实值完全相等.

此外，我们通过比较来说明，推论 1.1 的结果比引言中提到的文献 [2] 的结果要好. 比较推论 1.1 的结果与文献 [2] 的结果，差别在于 $(1+|z|)^{n-1}$ 与 $\sum\limits_{m=0}^{n-1}I(n,m)|z|^m$，即比较 $\sum\limits_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}|z|^m$ 与 $\sum\limits_{m=0}^{n-1}I(n,m)|z|^m$.

当 $n=2$ 时，本文所得结果与文献 [1, 2] 的结果相同，但当 $n\geq 3$ 时，本文结果要比文献 [2] 的结果好. 因为当 $n\geq 3$ 时，比较 $\binom{n-1}{m}$ 与 $I(n,m)$

$$\binom{n-1}{0}=I(n,0)=1,\quad \binom{n-1}{1}=I(n,1)=n-1.$$

当 $m\geq 2$ 时，

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{m}&=\binom{n-1}{n-1-m}=\binom{n-1}{n-1-m}I(n-m,m-m)\\&<\sum_{k=1}^{m}\binom{n-1}{n-k-1}I(n-k,m-k)=I(n,m).\end{aligned}$$

例如当 $n=3$ 时，文献 [2] 的结果是 $|\varphi'''(z)|\leq\frac{3!(1+2|z|+3|z|^2)}{(1-|z|^2)^3}(1-|\varphi(z)|^2)$，但本文推论 1.1 的结果是 $|\varphi'''(z)|\leq\frac{3!(1+2|z|+|z|^2)}{(1-|z|^2)^3}(1-|\varphi(z)|^2)$.

4 引理 2.2 的应用

我们已知有如下的 Bohr 定理.

定理 4.1 (见文献 [6]) 设 $\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|\varphi(z)|<1$, 则当 $|z|<\frac{1}{3}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^n<1$, 且 $|z|=\frac{1}{3}$ 是最佳半径.

利用引理 2.2 我们将得到比 Bohr 定理更精确的估计如下：

定理 4.2 设 $\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|\varphi(z)|<1$ 则当 $|z|\leq\frac{1}{3}$ 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^n<1-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{|z|^{2n+1}}{1-|z|}.$$

证 设 $r=|z|$，由引理 2.2

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^n=&|a_0|+|a_1|r+|a_2|r^2+|a_3|r^3+|a_4|r^4+\cdots+|a_n|r^n+\cdots\\\leq&|a_0|+(1-|a_0|^2)r+(1-|a_0|^2)r^2+(1-|a_0|^2-|a_1|^2)r^3+(1-|a_0|^2-|a_1|^2)r^4\\&+\cdots+(1-|a_0|^2-\cdots-|a_n|^2)r^{2n+1}+(1-|a_0|^2-\cdots-|a_n|^2)r^{2n+2}+\cdots\\=&|a_0|+(1-|a_0|^2)\sum_{n=1}^{\infty}r^n-\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2\sum_{m=2n+1}^{\infty}r^m)=|a_0|+(1-|a_0|^2)\frac{r}{1-r}-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n+1}}{1-r}.\end{aligned}$$

因为 $|a_0|+(1-|a_0|^2)\frac{r}{1-r}$ 关于 r 单调递增，那么当 $r\leq\frac{1}{3}$ 时

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^n\leq&|a_0|+(1-|a_0|^2)\frac{r}{1-r}-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n+1}}{1-r}\\\leq&|a_0|+(1-|a_0|^2)\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n+1}}{1-r}=\frac{2|a_0|+1-|a_0|^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n+1}}{1-r}.\end{aligned}$$

又当 $0 \le |a_0| < 1$ 时，$\frac{2|a_0|+1-|a_0|^2}{2} < 1$，所以当 $r \le \frac{1}{3}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^n < 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n+1}}{1-r}$. 定理证毕.

参 考 文 献

[1] 潘一飞，廖孝中. 关于有界函数的导数 [J]. 江西师范大学学报 (自然科学版). 1984，(1)：21–24.

[2] 苑文法. 有界正则函数的导数估计 [J]. 数学杂志. 2001，21(3)：301–303.

[3] 谭德邻. 有界异零解析函数的系数估计 [J]. 数学年刊. 1983，4(1)：97–104.

[4] 龚升. 关于 Mobius 变换的一点注记 [J]. 纯粹数学与应用数学. 1985，1(1)：1–15.

[5] Dai S Y, Pan Y F. Note on Schwarz-Pick estimates for bounded and positive real part analytic functions[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2008，136(2)：635–640.

[6] Boas H, Khavinson D. Bohr's power series theorem in several variables[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1997，125(10)：2975–2979.

ESTIMATION OF n-TH DERIVATIVES FOR BOUNDED ANALYTIC FUNCTIONS

DAI Shao-yu[1,2] , PAN Yi-fei[3,4]

(*1. School of Math. and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China*)

(*2.General Study Program, Jinling Institute of Technology, Nanjing 210001, China*)

(*3.Institute of Math. and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330027, China*)

(*4.Dept. of Math. Sciences, Indiana University-Purdue University Fort Wayne, Fort Wayne 46805-1499,USA*)

Abstract: In this article, we mainly study the n-th derivatives of bounded analytic functions. By using the coefficient estimation of Taylor expansion, we obtain an estimate of the n-th derivatives for bounded analytic functions. This estimate improves some results obtained before.

Keywords: bounded analytic function; estimation of derivative.

2000 MR Subject Classification: 30C10