系 统 科 学 与 数 学
24() (2004,), ***_***

关于 Heisenberg 群上次 Laplace 算子的唯一延拓性

韩 静[1] 戴 绍 虞[2] 潘 一 飞[3]

(1. 同济大学应用数学系，上海， 200092; 2. 金陵科技学院基础部，南京， 210001; 3. Indiana University-Purdue University Fort Wayne ， USA 江西师范大学数学与信息科学学院，江西南昌， 330027)

摘要 本文在 Heisenberg 群 H^n 中对微分不等式 $|\Delta_{\mathrm{H^n}} u| \leq C/d(z,t)^2\psi |u|$ 的非负解证明了某个唯一延拓性结果.

关键词 唯一延拓性; Heisenberg 群; 次 Laplace 算子.

MR(2000) 主题分类号 32H05

1 引 言

所谓 $2n+1$ 维 Heisenberg 群 H^n 是指

$$\mathrm{H^n} := \mathrm{C^n} \times \mathrm{R},$$

在其中对 $z, z' \in \mathrm{C^n}, \mathrm{t}, \mathrm{t'} \in \mathrm{R}$ 定义内积为

$$(z,t)(z',t') = (z+z', t+t'-1/2\Im(z\cdot z')).$$

所谓 Heisenberg 次 -Laplace 算子是指 H^n 上的左不变微分算子 $\Delta_{\mathrm{H^n}}$ ，

$$\Delta_{\mathrm{H^n}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(Z_j\bar{Z}_j + \bar{Z}_jZ_j),$$

而 Heisenberg 群梯度则定义为

$$|\nabla_{\mathrm{H^n}} u|^2 = \sum_{j=1}^{n} |Z_j u|^2,$$

其中

$$Z_j = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \frac{i}{2}z_j\frac{\partial}{\partial t}, \quad \bar{Z}_j = 2\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{i}{2}\bar{z}_j\frac{\partial}{\partial t}.$$

本文感兴趣的是方程

$$-\Delta_{\mathrm{H^n}} u + Vu = 0 \tag{1}$$

[0]* 国家自然科学基金 (10571135 ， 10511140543), 同济大学理科基金 (1390219060) 资助课题.
[0]收稿日期:

的解的唯一延拓性问题，对其中零阶的情形我们可以作适当的假定. Bahouri [1] 的定理说明，一般意义上的唯一延拓性是不成立的. 算子

$$L=(\frac{\partial}{\partial t})^2+(\frac{\partial}{\partial y}-4x\frac{\partial}{\partial t})^2\,,\,(x,y,t)\in \mathrm{R}^3$$

即给出了一个生动的例子.

Bahouri [1] 的构造说明，存在原点的一个邻域 Ω 以及一个 $V\in C^\infty(\Omega)$ ，使得

$$SuppV\subset\{x\geq 0\}\cap\Omega,\quad V \text{ 平坦于 } \{x=0\}, \tag{2}$$

并且方程 $-Lu+Vu=0$ 在 Ω 中存在平坦于 $\{x=0\}$ 的非零解，其支撑集包含于 $\{x\geq 0\}\cap\Omega$ 中. 坐标变换

$$(x,y,t)\to(x',y',t'),\quad x'=x,\ y'=y,\ t'=t-2xy$$

将平面 $\{x=0\}$ 映入平面 $\{x'=0\}$, 而且把 H^3 中的次 -Laplace 算子 Δ_{H^1} 变换为算子 L. 因此，存在原点的一个邻域 Ω 和一个 $V\in C^\infty(\Omega)$ 满足式 (1.2), 并且使得 $-\Delta_{\mathrm{H}^n}+V$ 不具有唯一延拓性质.

当 V 实解析时， Bony [2] 的一个定理说明方程 (1.1) 在开集中的解不能在一个开子集中为零除非这些解是恒等于零的.

当 V 不是实解析的时, 关于唯一延拓性的第一个肯定回答来自 Garofalo 和 Lanconelli [3]. 在文献 [3] 中 (其定理 1.4), 他们特别地证明了如下定理:

定理 [3] 设 u 是方程

$$-\Delta_{\mathrm{H}^n}u+\frac{C}{d^2}\psi u=0$$

在 H^n 中的一个解，并且假定 u 关于环群在 H^n 上的自然作用是不变的，即

$$u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{z},\mathrm{t})=\mathrm{u}(\mathrm{z},\mathrm{t}).$$

如果 u 在原点消失的阶数为无穷，则 $u\equiv 0$ 于 H^n .

文献 [5] 也作了一些这方面的研究.

这里我们用到了 Heisenberg 距离 $d=d(z,t)=(|\,z\,|^4+t^2)^{1/4}$ 以及 $\psi=\psi(z,t)=\frac{|z|^2}{d^2(z,t)}$. 众所周知,

$$\Gamma(z,t)=\frac{C_Q}{d(z,t)^{Q-2}}$$

是 $-\Delta_{\mathrm{H}^n}$ 在原点具有奇异性的基础解. 这里，数字 $Q=2n+2$ 是 H^n 的齐次维数，而 C_Q 是一个正常数. 以原点为心，以 r 为半径的 Heisenberg 球和 Heisenberg 球面则分别定义为

$$\Omega_r=\{(z,t)\in\mathrm{H}^n\mid\ \mathrm{d(z,t)<r}\},\quad \partial\Omega_\mathrm{r}=\{(\mathrm{z,t})\in\mathrm{H}^n\mid\ \mathrm{d(z,t)=r}\}.$$

在本文中我们先验假定一个微分不等式的解 $u\in C(\Omega_R)$ 并使得 $u,Z_ju,\Delta_{\mathrm{H}^n}u\in L^2(\Omega_R)$. 我们称这样的 u 在原点消失的阶数是无穷，如果对每一个 N 和 $r\approx 0$ 有

$$\int_{\Omega_r}u^2\psi dzdt=O(r^N).$$

这里应该视 $\psi(z,t)dzdt$ 为 H^n 中的 Heisenberg 体积元素. 这里需要注意的是 (见 [3]) ，Bahouri 给出的上述例子满足

$$|\,V(z,t)\,|\leq C\psi,\qquad \text{在 } (0,0) \text{ 附近}.$$

在本文中，我们在 Heisenberg 群 $\mathrm{H^n}$ 上证明某些有关唯一延拓性的肯定结论. 尽管唯一延拓性在一般意义上是不成立的，但是方程 (1.1) 的解还是具有稍弱一些的唯一性的，即我们有如下定理:

定理 1 设 u 是方程

$$-\Delta_{\mathrm{H^n}} u + V(d(z,t))\psi u = 0 \tag{3}$$

的一个解，在 Ω_R 内满足 $\mid V(d(z,t)) \mid \leq C/d^2(z,t)$. 如果 u 在原点消失无穷阶，则对 $0 \leq r < R$ 有

$$\int_{\Omega_r} u(z,t)\psi dzdt = 0.$$

定理 1 中的 u 是否就是零，将是很有趣的事情. 下面的定理说明非负解确实具有唯一性.

定理 2 设 u 是不等式

$$\mid \Delta_{\mathrm{H^n}} u \mid \leq \frac{C}{d(z,t)^2}\psi \mid u \mid \tag{4}$$

在 Ω_R 内的一个解，如果 $u \geq 0$ 而且 u 在原点消失无穷阶，则 $u \equiv 0$.

下面的结论则是关于满足另一个条件但未必是非负解的唯一性的.

定理 3 设 u 是不等式

$$\mid \Delta_{\mathrm{H^n}} u \mid \leq \frac{C}{d(z,t)^2}\psi \mid u \mid \tag{5}$$

在 Ω_R 内的一个解，如果 u 在原点消失无穷阶并且对 $r < R$ 满足

$$\int_{\partial\Omega_r} \mid \nabla_{\mathrm{H^n}} u \mid^2 d\mathrm{H_{2n}} \leq \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{r}^2}\int_{\partial\Omega_\mathrm{r}} \mathrm{u}^2\psi \mathrm{dH_{2n}},$$

则 $u \equiv 0$.

2 定 理 的 证 明

在本节中我们证明定理 1-3 . 这些证明基于 Garofalo 和 Lanconelli [3] 的次椭圆平均值公式.

引理 1 [3] 设 $v \in C^\infty(\mathrm{H^n})$ ，则对每一个 $r > 0$ ，我们有

$$\frac{1}{\mid \partial\Omega_r \mid_{\mathrm{H^n}}}\int_{\partial\Omega_r} v(z,t)\frac{\psi(z,t)}{\mid \nabla d(z,t) \mid} d\mathrm{H_{2n}} = \mathrm{v(0,0)} + \int_{\Omega_\mathrm{r}} \Delta_{\mathrm{H^n}}\mathrm{v(z,t)}[\Gamma(\mathrm{z,t}) - \frac{\mathrm{C_Q}}{\mathrm{r^{Q-2}}}]\mathrm{dzdt}$$

这里沿用文献 [3] 的记法，我们定义

$$\mid \partial\Omega_r \mid_{\mathrm{H^n}} = \frac{d}{dr} \mid \Omega_r \mid_{\mathrm{H^n}}$$

其中

$$\mid \Omega_r \mid_{\mathrm{H^n}} = \int_{\Omega_r} \psi(z,t) dzdt.$$

对每一个 u ，对 $r > 0$ 我们引入一个函数 $\tilde{u}$ 如下

$$\tilde{u}(r) = \frac{1}{\mid \partial\Omega_r \mid_{\mathrm{H^n}}}\int_{\partial\Omega_r} u(z,t)\frac{\psi(z,t)}{\mid \nabla d(z,t) \mid} d\mathrm{H_{2n}}.$$

下面介绍一下 Federer 余面积公式:
设 $f\in L^1(\mathrm{R^N})$, $g\in Lip(\mathrm{R^N})$, 则

$$\int_{\mathrm{R^N}} f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\{g=\rho\}}\frac{f(x)}{\mid\nabla g(x)\mid}d\mathrm{H_{N-1}}\mathrm{d}\rho,$$

其中 $d\mathrm{H_{N-1}}$ 是 $N-1$ 维 Hausdorff 测度，只要对 a.e. $\rho\in\mathrm{R}$ 在 $\{g=\rho\}$ 上有 $\nabla g\neq 0$ ，上式即成立．则对任意 u 显然可得

$$\int_{\Omega_r}u(z,t)dzdt=\int_0^r\int_{\partial\Omega_\rho}\frac{u(z,t)}{\mid\nabla d(z,t)\mid}d\mathrm{H_{2n}}\mathrm{d}\rho.$$

特别地,

$$\mid\Omega_r\mid_{\mathrm{H^n}}=\int_0^r\int_{\partial\Omega_\rho}\frac{\psi(z,t)}{\mid\nabla d(z,t)\mid}d\mathrm{H_{2n}}\mathrm{d}\rho,$$

而且

$$\mid\partial\Omega_r\mid_{\mathrm{H^n}}=\int_{\partial\Omega_r}\frac{\psi(z,t)}{\mid\nabla d(z,t)\mid}d\mathrm{H_{2n}}.$$

为了证明定理 1-3 ，我们还需要下面三个引理.

引理 2 对每一个 $r>0$ ，我们有

$$\frac{1}{\mid\partial\Omega_r\mid_{\mathrm{H^n}}}\int_{\partial\Omega_r}\Delta_{\mathrm{H^n}}u(z,t)\frac{1}{\mid\nabla d(z,t)\mid}d\mathrm{H_{2n}}=\mathrm{\tilde{u}''(r)}+\frac{\mathrm{Q-1}}{\mathrm{r}}\mathrm{\tilde{u}'(r)}.$$

证 根据引理 1 以及 Federer 余面积公式，我们有

$$\tilde{u}(r)=u(0)+\int_{\Omega_r}\Delta_{\mathrm{H^n}}u(z,t)[\Gamma(z,t)-\frac{C_Q}{r^{Q-2}}]dzdt$$

$$=u(0)+\int_0^r\int_{\partial\Omega_\rho}\Delta_{\mathrm{H^n}}u(z,t)[\Gamma(z,t)-\frac{C_Q}{r^{Q-2}}]\frac{1}{\mid\nabla d(z,t)\mid}d\mathrm{H_{2n}}\mathrm{d}\rho.$$

利用极坐标，又由于显然 $\Gamma\in L^1(\Omega_r)$ ，因此通过积分我们可以得到

$$\tilde{u}(r)=u(0)+\int_0^r\int_{\partial\Omega_\rho}\Delta_{\mathrm{H^n}}u(z,t)\frac{\Gamma(z,t)}{\mid\nabla d(z,t)\mid}d\mathrm{H_{2n}}\mathrm{d}\rho$$

$$-\frac{C_Q}{r^{Q-2}}\int_0^r\int_{\partial\Omega_\rho}\Delta_{\mathrm{H^n}}u(z,t)\frac{1}{\mid\nabla d(z,t)\mid}d\mathrm{H_{2n}}\mathrm{d}\rho.$$

由此易得

$$\tilde{u}'(r)=\frac{(Q-2)C_Q}{r^{Q-1}}\int_0^r\int_{\partial\Omega_\rho}\Delta_{\mathrm{H^n}}u(z,t)\frac{1}{\mid\nabla d(z,t)\mid}d\mathrm{H_{2n}}\mathrm{d}\rho$$

$$\tilde{u}''(r)=\frac{(Q-2)(1-Q)C_Q}{r^Q}\int_0^r\int_{\partial\Omega_\rho}\Delta_{\mathrm{H^n}}u(z,t)\frac{1}{\mid\nabla d(z,t)\mid}d\mathrm{H_{2n}}\mathrm{d}\rho+$$

$$\frac{(Q-2)C_Q}{r^{Q-1}}\int_{\partial\Omega_r}\Delta_{\mathrm{H^n}}u(z,t)\frac{1}{\mid\nabla d(z,t)\mid}d\mathrm{H_{2n}}.$$

因此

$$\tilde{u}''(r)+\frac{Q-1}{r}\tilde{u}'(r)=\frac{(Q-2)C_Q}{r^{Q-1}}\int_{\partial\Omega_r}\Delta_{\mathrm{H^n}}u(z,t)\frac{1}{\mid\nabla d(z,t)\mid}d\mathrm{H}_{2\mathrm{n}}.$$

显然可以验证

$$\frac{(Q-2)C_Q}{r^{Q-1}}=\mid\Omega_r\mid_{\mathrm{H^n}}^{-1}.$$

该引理得证.

引理 3 [4] 设 $u\in C^\infty((0,R])$ 且满足

$$\mid u''(r)\mid\le C(\frac{1}{r^2}\mid u(r)\mid+\frac{1}{r}\mid u'(r)\mid).$$

如果对每一个 N 都有 $u(r)=O(r^N)$ $(r\to 0)$ ，则在 $[0,R]$ 中 $u=0$.

引理 4 如果 u 在原点消失的阶数是无穷， i.e.

$$\int_{\Omega_r}u^2\psi dzdt=O(r^N)$$

则对每一个 N ， $\tilde{u}(r)=O(r^N)$ $(r\approx 0)$.

证 事实上，根据 Cauchy 不等式有

$$\tilde{u}^2(\rho)=\left(\frac{1}{\mid\partial\Omega_\rho\mid_{\mathrm{H^n}}}\int_{\partial\Omega_\rho}u(z,t)\frac{\psi(z,t)}{\mid\nabla d(z,t)\mid}d\mathrm{H}_{2\mathrm{n}}\right)^2$$

$$\le\frac{1}{\mid\partial\Omega_\rho\mid_{\mathrm{H^n}}^2}\left(\int_{\partial\Omega_\rho}u^2(z,t)\frac{\psi(z,t)}{\mid\nabla d(z,t)\mid}d\mathrm{H}_{2\mathrm{n}}\right)\cdot\int_{\partial\Omega_\rho}\frac{\psi(z,t)}{\mid\nabla d(z,t)\mid}d\mathrm{H}_{2\mathrm{n}}$$

$$=\frac{1}{\mid\partial\Omega_\rho\mid_{\mathrm{H^n}}}\int_{\partial\Omega_\rho}u^2(z,t)\frac{\psi(z,t)}{\mid\nabla d(z,t)\mid}d\mathrm{H}_{2\mathrm{n}}.$$

因为对某个常数 C ， $\mid\partial\Omega_\rho\mid_{\mathrm{H^n}}=C\rho^{Q-2}$ ，所以我们有

$$\int_0^r\rho^{Q-2}\tilde{u}^2(\rho)d\rho\le C^{-1}\int_0^r\int_{\partial\Omega_\rho}u^2(z,t)\frac{\psi(z,t)}{\mid\nabla d(z,t)\mid}d\mathrm{H}_{2\mathrm{n}}$$

$$=C^{-1}\int_{\Omega_r}u^2(z,t)\psi(z,t)dzdt.$$

再根据 u 的无穷消失性，我们得知

$$\int_0^r\rho^{Q-2}\tilde{u}^2(\rho)d\rho=O(r^N).$$

取 N 为 $2N+Q-1$ ，利用 L'Hopital's 法则显然可得

$$0=\lim_{r\to 0}\frac{\int_0^r\rho^{Q-2}\tilde{u}^2(\rho)d\rho}{r^{2N+Q-1}}=(2N+Q-1)^{-1}\lim_{r\to 0}\frac{\tilde{u}^2(r)}{r^{2N}},$$

这说明 $\tilde{u}(r)=O(r^N)$. 该引理证毕.

下面证明定理 1-3 .

定理 1 的证明 对等式 (3) 两边同时积分，我们得到

$$\frac{1}{|\partial\Omega_r|_{\mathrm{H^n}}}\int_{\partial\Omega_r}\Delta_{\mathrm{H^n}}u(z,t)\frac{1}{|\nabla d(z,t)|}d\mathrm{H_{2n}}+\mathrm{V(r)}\frac{1}{|\partial\Omega_\mathrm{r}|_{\mathrm{H^n}}}\int_{\partial\Omega_\mathrm{r}}\mathrm{u}\psi\frac{1}{|\nabla\mathrm{d(z,t)}|}\mathrm{dH_{2n}}=0,$$

根据引理 3，这等价于

$$\tilde{u}''(r)+\frac{Q-1}{r}\tilde{u}'(r)+V(r)\tilde{u}(r)=0.$$

这个不等式说明

$$|\tilde{u}''(r)|\le C(\frac{1}{r^2}|\tilde{u}(r)|+\frac{1}{r}|\tilde{u}'(r)|).$$

因为 u 在原点消失的阶数为无穷， i.e.

$$\int_{\Omega_r}u^2\psi dzdt=O(r^N),$$

由引理 4， $\tilde{u}=O(r^N)$，再根据引理 3 可知 $\tilde{u}(r)=0$，而且

$$\int_{\Omega_r}u(z,t)\psi dzdt=\int_0^r\tilde{u}(\rho)d\rho=0.$$

定理 1 证毕.

定理 2 的证明 对等式 (4) 两边同时积分，利用 $u\ge 0$ 我们得到

$$\frac{1}{|\partial\Omega_r|_{\mathrm{H^n}}}\left|\int_{\partial\Omega_r}\Delta_{\mathrm{H^n}}u\frac{1}{|\nabla d(z,t)|}d\mathrm{H_{2n}}\right|\le\frac{1}{|\partial\Omega_r|_{\mathrm{H^n}}}\int_{\partial\Omega_r}|\Delta_{\mathrm{H^n}}u|\frac{1}{|\nabla d(z,t)|}d\mathrm{H_{2n}}$$

$$\le\frac{C}{r^2}\frac{1}{|\partial\Omega_r|_{\mathrm{H^n}}}\int_{\partial\Omega_r}u\frac{\psi(z,t)}{|\nabla d(z,t)|}d\mathrm{H_{2n}}.$$

根据引理 2，由上式可得

$$|\tilde{u}''(r)+\frac{Q-1}{r}\tilde{u}'(r)|\le\frac{C}{r^2}\tilde{u}(r),$$

其中 $\tilde{u}(r)$ 一如从前. 因此

$$|\tilde{u}''(r)|\le\frac{Q-1}{r}|\tilde{u}'(r)|+\frac{C}{r^2}|\tilde{u}(r)|.$$

因为 u 在原点消失的阶数为无穷，根据引理 4 知 $\tilde{u}$ 也如此，利用引理 3 得知 $\tilde{u}\equiv 0$．又因为 $\psi u(z,t)\ge 0$，这说明 $u\equiv 0$．定理 2 证毕.

定理 3 的证明 显然我们有如下公式

$$\Delta_{\mathrm{H^n}}u^2=2u\Delta_{\mathrm{H^n}}u+2|\nabla_{\mathrm{H^n}}u|^2.$$

由定理 3 的假定，我们又有

$$|\Delta_{\mathrm{H^n}}u^2|\le\frac{C}{r^2}u^2\psi+2|\nabla_{\mathrm{H^n}}u|^2.$$

对上式两边同时积分并利用已知假定，则在定理 2 的证明中用 u^2 代替 u 即可完成定理 3 的证明. 定理 3 证毕.

注 1 由文献 [3] 中的一个公式可见，如果 u 是 $\mathrm{H^n}$ 上的一个径向函数， i.e. ，如果对某个 f ， $u(z,t)=f(\rho(z,t))$ ，则

$$\Delta_{\mathrm{H^n}}u=\psi[\,f''(\rho)+\frac{Q-1}{\rho}f'(\rho)\,],$$

其中 $Q=2n+2$ ．因此，由引理 3 知，不等式

$$|\,\Delta_{\mathrm{H^n}}u\,|\leq\frac{C}{\rho^2}\psi\,|\,u\,|$$

的径向解满足唯一延拓性.

注 2 文献 [4] 和 [6] 说明，对于 $\mathrm{R^n}$ 上的 Schrodinger 不等式

$$|\,\Delta u\,|\leq\frac{C}{|x|^2}\,|\,u\,|$$

来说，唯一延拓性是成立的.

参 考 文 献

[1] H. Bahouir, Non prolongment unique des solutions d‘operateurs, Ann. Inst. Fourier Grenable, 1986, 36(4): 137-155.
[2] J. M. Bony, Principe du maximum, inequalite de Harnack et unicite du probleme de Cauchy pour les operateur elluptiques degeneres, Ann. Inst. Fourier, Grenable, 1969, 19(1): 277-304.
[3] N. Garofalo and E. Lanconelli, Frequencey functions on the Heisenberg group, the uncertainly principle and unique continuation, Ann. Inst. Fourier, Grenable, 1990, 40(2): 313-356.
[4] Y. Pan, Unique continuation for Schrodinger operators with singular potential, Comm. in PDE, 1992, 17(5): 953-965.
[5] 张慧清，钮鹏程，王盛军， Heisenberg 群上次 Laplace 算子的 Carleman 型估计与唯一延拓性，系统科学与数学， 2003, 23(1): 51-57.
[6] Y. Pan, and Tom Wolff, A Remark on Unique continuation, J.Geom. Analysis, 1998, 8: 599-604.

ON UNIQUE CONTINUATION PROPERTY FOR THE SUB-LAPLACIAN IN THE HEISENBERG GROUP

Han Jing[1], Shaoyu Dai[2], Yifei Pan[3]

(*1.Dept. of Appli. Math., Tongji Univ., Shanghai* 200092 China *2.General Study Program, Jin Ling Univ. of Science and Technology, Nanjing* 210001 China; *3.Indiana University-Purdue University Fort Wayne, USA and Institute of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang* 330027 China)

Abstract In this paper we proved some unique continuation results to nonnegative solutions of the differential inequality $|\,\Delta_{\mathrm{H^n}}u\,|\leq C/d(z,t)^2\psi\,|\,u\,|$ on the Heisenberg group $\mathrm{H^n}$.

Key words unique continuation; Heisenberg group; sub-Laplace operator